$$2(\overset{c}{\nabla}_Z \tilde{g})(X,Y) = \bar{g}(Q(Z,X),Y) + \bar{g}(X,Q(Z,Y)), \qquad (2)$$

где

$$Q(Z,X) = \overset{F}{\nabla}_Z X - \overset{\omega}{\nabla}_Z X, \quad \bar{g} = \overset{F}{g} - \overset{\omega}{g}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. $\tilde{g} = \overset{F}{g} + \overset{\omega}{g}$,

$$(\overset{c}{\nabla}_Z \tilde{g})(X,Y) = \frac{1}{2}(\overset{\omega}{\nabla}_Z \overset{F}{g})(X,Y) + \frac{1}{2}(\overset{F}{\nabla}_Z \overset{\omega}{g})(X,Y),$$

$$(\overset{\omega}{\nabla}_Z \overset{F}{g})(X,Y) = Zg(FX,FY) - g(F\overset{\omega}{\nabla}_Z X, FY) - g(FX, F\overset{\omega}{\nabla}_Z Y) =$$
$$= g(\overset{\circ}{\nabla}_Z FX - F\omega^{-1}\nabla^1_Z \omega X, FY) + g(FX, \overset{\circ}{\nabla}_Z FY - F\omega^{-1}\nabla^1_Z \omega Y).$$

Так как

$$\overset{\circ}{\nabla}_Z FX - F\omega^{-1}\nabla^1_Z \omega X = FQ(Z,X),$$

получим

$$(\overset{\omega}{\nabla}_Z \overset{F}{g})(X,Y) = \overset{F}{g}(Q(Z,X),Y) + \overset{F}{g}(X,Q(Z,Y)).$$

Аналогично находим

$$(\overset{F}{\nabla}_Z \overset{\omega}{g})(X,Y) = -\overset{\omega}{g}(Q(Z,X),Y) - \overset{\omega}{g}(X,Q(Z,Y)).$$

Отсюда следует (2).

С л е д с т в и е 3. Следующие утверждения эквивалентны: 1) связность $\overset{c}{\nabla}$ согласована с метрикой $\tilde{g}$; 2) $\bar{g}(Q(Z,X),Y) + \bar{g}(X,Q(Z,Y)) = 0$.

С л е д с т в и е 4. Если $\overset{F}{g} = \overset{\omega}{g}$, то связность $\overset{c}{\nabla}$ согласована с метрикой $\tilde{g}$.

Библиографический список

1. К о б а я с и Ш., Н о м и д з у К. Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т.2. 414 с.

2. Bourguignon J.P. Codazzi tensor fields and curvature operators // Lect. Notes. Math. 1981. V. 838. P. 249–250.

УДК 514.76

СВЯЗНОСТЬ В ПРОДОЛЖЕНИИ ГЛАВНОГО РАССЛОЕНИЯ

Ю.И.Ш е в ч е н к о

(Калининградский государственный университет)

Доказано, что связности главного расслоения и расслоения линейных реперов касательных пространств к базе главного расслоения имеют лифт в продолжении главного расслоения. Параллельно показано, что объекты кручения линейной связности и кривизны произвольной фундаментально-групповой связности в неголономном случае, вообще говоря, – не тензоры, а в голономном случае – тензоры.

1. Связность в главном расслоении. Рассмотрим главное расслоение $G_r(V_n)$ со структурными уравнениями Лаптева [1], [2, с.25]:

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, \qquad (1)$$
$$d\omega^\alpha = \frac{1}{2} C^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + \omega^i \wedge \omega^\alpha_i, \qquad (2)$$

где индексы принимают следующие значения:

$$i,j,k,l,p,q = \overline{1,n}; \quad \alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon = \overline{n+1,n+r},$$

а $C^\alpha_{\beta\gamma}$ – структурные константы r-членной группы Ли G_r, удовлетворяющие условиям антисимметрии $C^\alpha_{(\beta\gamma)}=0$ и тождествам Якоби

$$C^\alpha_{\beta\{\gamma} C^\beta_{\delta\varepsilon\}} = 0, \qquad (3)$$

причем круглые скобки обозначают симметрирование, а фигурные – циклирование. Базой главного расслоения $G_r(V_n)$ является n-мерное дифференцируемое многообразие V_n, имеющее структурные уравнения (1), а типовым слоем служит группа Ли G_r. Вполне интегрируемая система уравнений $\omega^i = 0$ фиксирует точку базы V_n, поэтому из уравнений (2) вытекают структурные уравнения для инвариантных форм $\bar\omega^\alpha = \omega^\alpha|_{\omega^i=0}$ группы Ли G_r:

$$d\bar\omega^\alpha = \frac{1}{2} C^\alpha_{\beta\gamma}\bar\omega^\beta \wedge \bar\omega^\gamma. \qquad (4)$$

Для задания связности в главном расслоении $G_r(V_n)$ по Лаптеву [1] введем формы $\tilde\omega^\alpha = \omega^\alpha - \Gamma^\alpha_i \omega^i$, где Γ^α_i – некоторые функции базисных и слоевых параметров. Внешние дифференциалы форм $\widetilde{\omega}^\alpha$ имеют вид

$$d\widetilde{\omega}^\alpha = \frac{1}{2} C^\alpha_{\beta\gamma}\widetilde{\omega}^\beta\wedge\widetilde{\omega}^\gamma + \omega^i\wedge(\nabla\Gamma^\alpha_i+\omega^\alpha_i) - \frac{1}{2} C^\alpha_{\beta\gamma}\Gamma^\beta_i\Gamma^\gamma_j\omega^i\wedge\omega^j, \tag{5}$$

причем дифференциальный оператор ∇ действует следующим образом:

$$\nabla\Gamma^\alpha_i = d\Gamma^\alpha_i - \Gamma^\alpha_j\omega^j_i + \Gamma^\beta_i\omega^\alpha_\beta,$$

где

$$\omega^\alpha_\beta = C^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\gamma. \tag{6}$$

По теореме Картана-Лаптева [3] фундаментально-групповая связность в главном расслоении $G_r(V_n)$ задается с помощью поля объекта Γ^α_i на базе V_n :

$$\nabla\Gamma^\alpha_i + \omega^\alpha_i = \Gamma^\alpha_{ij}\omega^j. \tag{7}$$

Тогда из уравнений (5) вытекают структурные уравнения для форм связности $\widetilde{\omega}^\alpha$:

$$d\widetilde{\omega}^\alpha = \frac{1}{2} C^\alpha_{\beta\gamma}\widetilde{\omega}^\beta\wedge\widetilde{\omega}^\gamma + R^\alpha_{ij}\omega^i\wedge\omega^j, \tag{8}$$

где компоненты объекта кривизны R^α_{ij} выражаются по формуле [4, с.93]:

$$R^\alpha_{ij} = \Gamma^\alpha_{[ij]} - \frac{1}{2} C^\alpha_{\beta\gamma}\Gamma^\beta_i\Gamma^\gamma_j. \tag{9}$$

Здесь и в дальнейшем по крайним индексам, заключенным в квадратные скобки, производится альтернирование.

2. Объект кривизны с внешней точки зрения. Найдем дифференциальные уравнения для компонент объекта кривизны R^α_{ij}, пользуясь структурными уравнениями (8). Дифференцируя их внешним образом, получим

$$(dR^\alpha_{ij} - R^\alpha_{kj}\omega^k_i - R^\alpha_{ik}\omega^k_j + R^\beta_{ij}C^\alpha_{\beta\gamma}\widetilde{\omega}^\gamma)\wedge\omega^i\wedge\omega^j + \frac{1}{2} C^\alpha_{\beta\gamma}C^\beta_{\delta\varepsilon}\widetilde{\omega}^\gamma\wedge\widetilde{\omega}^\delta\wedge\widetilde{\omega}^\varepsilon = 0.$$

Подставляя сюда выражения форм связности $\widetilde{\omega}^\gamma$, вводя оператор ∇ и учитывая, что последние слагаемые обращаются в нуль в силу тождеств (3), можем написать:

$$[(\nabla R^\alpha_{ij} - R^\beta_{ij}C^\alpha_{\beta\gamma}\Gamma^\gamma_k\omega^k)\wedge\omega^j]\wedge\omega^i = 0.$$

Применяя обобщенную лемму Картана [5], найдем

$$(\nabla R^\alpha_{ij} - R^\beta_{ij}C^\alpha_{\beta\gamma}\Gamma^\gamma_k\omega^k)\wedge\omega^j = \omega^j\wedge\theta^\alpha_{ij}, \tag{10}$$

причем

$$\omega^i\wedge\omega^j\wedge\theta^\alpha_{ij} = 0. \tag{11}$$

Перенося в уравнениях (10) все члены влево, вынося формы ω^j

и применяя лемму Картана, получим

$$\nabla R^\alpha_{ij} - R^\beta_{ij}C^\alpha_{\beta\gamma}\Gamma^\gamma_k\omega^k + \theta^\alpha_{ij} = R^\alpha_{ijk}\omega^k,$$

причем величины R^α_{ijk} симметричны по индексам j,k. Наконец, запишем эти уравнения в виде

$$\nabla R^\alpha_{ij} + \theta^\alpha_{ij} \equiv 0, \tag{12}$$

где символ $\equiv$ означает сравнение по модулю базисных форм ω^k. Из уравнений (12) в силу достаточной произвольности форм θ^α_{ij} следует

Теорема 1. Объект кривизны R^α_{ij} фундаментально-групповой связности главного расслоения $G_r(V_n)$ в общем случае не является не только тензором, но даже геометрическим объектом.

Замечания: 1) условия $\theta^\alpha_{[ij]}=0$ лишь достаточны [5, с.142] для выполнения соотношений (11); 2) симметрируя сравнения (12) и учитывая антисимметрию компонент объекта кривизны R^α_{ij} по нижним индексам, найдем условия $\theta^\alpha_{(ij)}\equiv 0$; 3) обычно рассматривается случай $\theta^\alpha_{[ij]}\equiv 0$, когда объект кривизны R^α_{ij} есть тензор [4, с.63], [6, с.61], [7, с.7], [8, с.141]; в этом случае говорят также о дифференциально-геометрическом объекте кривизны [9, с.448] или просто об объекте кривизны [2, с.58], [4, с.93].

3. Объект кривизны с внутренней точки зрения. Теперь найдем дифференциальные уравнения для компонент объекта кривизны R^α_{ij}, пользуясь их выражениями (9). Предварительно продолжим уравнения (1), (2), т.е. дифференцируя их внешним образом и применяя обобщенную лемму Картана, получим [1] :

$$d\omega^i_j = \omega^k_j\wedge\omega^i_k + \omega^k\wedge\omega^i_{jk}, \tag{13}$$

$$d\omega^\alpha_i = \omega^j_i\wedge\omega^\alpha_j + \omega^\beta_i\wedge\omega^\alpha_\beta + \omega^j\wedge\omega^\alpha_{ij}, \tag{14}$$

причем

$$\omega^j\wedge\omega^k\wedge\omega^i_{jk} = 0, \quad \omega^i\wedge\omega^j\wedge\omega^\alpha_{ij} = 0.$$

Для выполнения этих условий достаточно рассматривать голономный случай, т.е. потребовать симметричность трехиндексных форм по нижним индексам:

$$\omega^i_{[jk]} = 0, \quad \omega^\alpha_{[ij]} = 0. \tag{15}$$

Продолжая уравнения (7) с помощью уравнений (13), (14), найдем

$$\nabla\Gamma^\alpha_{ij} - \Gamma^\alpha_k \omega^k_{ij} + C^\alpha_{\beta\gamma}\Gamma^\beta_i \omega^\gamma_j + \omega^\alpha_{ij} \equiv 0, \qquad (16)$$

откуда с использованием формулы (9) получим

$$\nabla R^\alpha_{ij} - \Gamma^\alpha_k \omega^k_{[ij]} + \omega^\alpha_{[ij]} \equiv 0. \qquad (17)$$

Из сравнений (17) с учетом условий (15) вытекает

Т е о р е м а 2. Объект кривизны R^α_{ij} фундаментально-групповой связности в голономном случае есть тензор.

З а м е ч а н и я: 4) сопоставляя сравнения (12) и (17), имеем $\theta^\alpha_{ij} = \omega^\alpha_{[ij]} - \Gamma^\alpha_k \omega^k_{[ij]}$; 5) сравнения (17) показывают, что в общем случае лучше говорить об объекте связности-кривизны $\{\Gamma^\alpha_i, R^\alpha_{ij}\}$ вместо объекта кривизны R^α_{ij}.

4. Линейная связность и расслоения реперов. Уравнения (1), (13) есть структурные уравнения расслоения линейных реперов $L_{n^2}(V_n)$ – главного расслоения, базой которого служит многообразие V_n, а типовым слоем является линейная группа $L_{n^2} = GL(n)$, действующая в фиксированном касательном пространстве к многообразию V_n. При $\omega^i = 0$ из уравнений (13) получим структурные уравнения линейной группы $GL(n)$:

$$d\bar\omega^i_j = \bar\omega^k_j \wedge \bar\omega^i_k. \qquad (18)$$

Согласно способу Лаптева для задания связности в главном расслоении $L_{n^2}(V_n)$ рассмотрим формы $\tilde\omega^i_j = \omega^i_j - \Gamma^i_{jk}\omega^k$, имеющие внешние дифференциалы:

$$d\tilde\omega^i_j = \tilde\omega^k_j \wedge \tilde\omega^i_k + \omega^k \wedge (\nabla\Gamma^i_{jk} + \omega^i_{jk}) - \Gamma^p_{jk}\Gamma^i_{p\ell}\,\omega^k \wedge \omega^\ell$$

Связность в расслоении линейных реперов $L_{n^2}(V_n)$ задается с помощью поля объекта линейной связности Γ^i_{jk} :

$$\nabla\Gamma^i_{jk} + \omega^i_{jk} = \Gamma^i_{jk\ell}\,\omega^\ell. \qquad (19)$$

Структурные уравнения для форм связности $\tilde\omega^i_j$ принимают вид

$$d\tilde\omega^i_j = \tilde\omega^k_j \wedge \tilde\omega^i_k + R^i_{jk\ell}\,\omega^k \wedge \omega^\ell, \qquad (20)$$

где компоненты объекта кривизны линейной связности выражаются по формуле

$$R^i_{jk\ell} = \Gamma^i_{j[k\ell]} - \Gamma^p_{j[k}\Gamma^i_{p\ell]}. \qquad (21)$$

Введем формы линейной связности $\tilde\omega^i_j$ в уравнения (1):

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \tilde\omega^i_j + S^i_{jk}\,\omega^j \wedge \omega^k,$$

где $S^i_{jk} = \Gamma^i_{[jk]}$ – объект кручения. Альтернируя уравнения (19)

по нижним индексам, имеем

$$\nabla S^i_{jk} + \omega^i_{[jk]} \equiv 0. \qquad (22)$$

Для нахождения сравнений на компоненты объекта кривизны $R^i_{jk\ell}$, продолжим уравнения (13) и найдем [5], [9]:

$$d\omega^i_{jk} = \omega^\ell_{jk} \wedge \omega^i_\ell + \omega^\ell_j \wedge \omega^i_{\ell k} + \omega^\ell_k \wedge \omega^i_{j\ell} + \omega^\ell \wedge \omega^i_{jk\ell}, \qquad (23)$$

причем $\omega^k \wedge \omega^\ell \wedge \omega^i_{jk\ell} = 0$. Выполнение этих условий обеспечивается равенствами $\omega^i_{j[k\ell]} = 0$ или, более того, симметричностью форм $\omega^i_{jk\ell}$ по всем нижним индексам [1]. При фиксации точки базы V_n из уравнений (23) получим

$$d\bar\omega^i_{jk} = \bar\omega^\ell_{jk} \wedge \bar\omega^i_\ell + \bar\omega^\ell_j \wedge \bar\omega^i_{\ell k} + \bar\omega^\ell_k \wedge \bar\omega^i_{j\ell}. \qquad (24)$$

Уравнения (18), (24) являются структурными уравнениями неголономной дифференциальной группы 2-го порядка $\mathcal{D}^2$ [9, с.439], причем $\dim \mathcal{D}^2 = n^2(n+1)$. Группа $\mathcal{D}^2$ содержит дифференциальную группу 1-го порядка $\mathcal{D}^1 = GL(n)$, точнее, некоторую фактор-группу, изоморфную группе $GL(n)$. В случае симметричности форм $\bar\omega^i_{jk}$ по нижним индексам получается [1] голономная дифференциальная группа $\mathcal{D}^2_0$, причем $\dim \mathcal{D}^2_0 = \frac{1}{2} n^2(n+3)$.

Если не фиксировать точку базы V_n , то вместо уравнений (18), (24) имеем уравнения (1), (13), (23), которые являются структурными уравнениями главного расслоения $\mathcal{D}^2(V_n)$ – расслоения неголономных реперов 2-го порядка. В случае $\omega^i_{[jk]} = 0$ получаем расслоение голономных реперов 2-го порядка $\mathcal{D}^2_0(V_n)$ [4, с.49]. Продолжение уравнений (23) дает расслоение неголономных, а при симметрии форм ω^i_{jk}, $\omega^i_{jk\ell}$ по нижним индексам – голономных реперов 3-го порядка и т.д.

Продолжая уравнения (19), найдем

$$\nabla\Gamma^i_{jk\ell} - \Gamma^i_{pk}\omega^p_{j\ell} - \Gamma^i_{jp}\omega^p_{k\ell} + \Gamma^p_{jk}\omega^i_{p\ell} + \omega^i_{jk\ell} \equiv 0. \qquad (25)$$

Теперь согласно формуле (21) получим

$$\nabla R^i_{jk\ell} - \Gamma^i_{jp}\omega^p_{[k\ell]} + \omega^i_{j[k\ell]} \equiv 0. \qquad (26)$$

Из сравнений (22), (26) следует

Т е о р е м а 3. Для того чтобы объекты кручения S^i_{jk} и кривизны $R^i_{jk\ell}$ линейной связности были тензорами, достаточна голономность расслоения реперов соответственно 2-го и 3-го порядка.

З а м е ч а н и я: 6) как правило объекты кручения и кри-

9 Зак. 2305

визны линейной связности – тензоры [4, с.64, 13], [6, с.69, 70], [9, с.466], [10, с.381]; 7) в теоремах I-3 речь идет о тензорах, хотя с точки зрения приложений лучше говорить о псевдотензорах, т.е. объектах, вообще говоря, не являющихся геометрическими объектами, обращение которых в нуль имеет инвариантный смысл [11, с.37, 42], [12, с.118]; 8) Ю.Г.Лумисте фактически рассматривал [13] псевдотензор кривизны линейной связности и объект кручения, не являющийся ни геометрическим объектом, ни псевдотензором; 9) голономная дифференциальная группа открыта Вагнером под названием "полная дифференциальная группа" [14] ; 10) рассмотренные Ю.Г.Лумисте неголономная дифференциальная группа и соответствующее главное расслоение назывались им впоследствии полуголономной дифференциальной группой и расслоением полуголономных кореперов [15] , а также расслоением соприкасающихся неголономных сверхреперов [2].

5. <u>Линейная связность 2-го порядка.</u> Для задания связности в главном расслоении $\mathcal{D}^2(V_n)$ наряду с формами $\widetilde{\omega}^i_j$ рассмотрим формы $\widetilde{\omega}^i_{jk}=\omega^i_{jk}-L^i_{jkl}\omega^l$, внешние дифференциалы которых имеют вид

$$d\widetilde{\omega}^i_{jk}=\widetilde{\omega}^l_{jk}\wedge\widetilde{\omega}^i_l+\widetilde{\omega}^l_j\wedge\widetilde{\omega}^i_{lk}+\widetilde{\omega}^l_k\wedge\widetilde{\omega}^i_{jl}+\omega^l\wedge(\nabla L^i_{jkl}-\Gamma^i_{pl}\omega^p_{jk}+$$
$$+\Gamma^p_{jl}\omega^i_{pk}+\Gamma^p_{kl}\omega^i_{jp}+\omega^i_{jkl})-(L^q_{jkl}\Gamma^i_{qp}+\Gamma^q_{jl}L^i_{qkp}+\Gamma^q_{kl}L^i_{jqp})\omega^l\wedge\omega^p.$$

Связность в расслоении неголономных реперов $\mathcal{D}^2(V_n)$ задается с помощью объекта линейной связности 2-го порядка $\{\Gamma^i_{jk}, L^i_{jkl}\}$, причем компоненты L^i_{jkl} удовлетворяют уравнениям

$$\nabla L^i_{jkl}-\Gamma^i_{pl}\omega^p_{jk}+\Gamma^p_{jl}\omega^i_{pk}+\Gamma^p_{kl}\omega^i_{jp}+\omega^i_{jkl}=L^i_{jklp}\omega^p \qquad (27)$$

Формы линейной связности 2-го порядка $\widetilde{\omega}^i_j$, $\widetilde{\omega}^i_{jk}$ удовлетворяют структурным уравнениям (20) и следующим:

$$d\widetilde{\omega}^i_{jk}=\widetilde{\omega}^l_{jk}\wedge\widetilde{\omega}^i_l+\widetilde{\omega}^l_j\wedge\widetilde{\omega}^i_{lk}+\widetilde{\omega}^l_k\wedge\widetilde{\omega}^i_{jl}+R^i_{jklp}\omega^l\wedge\omega^p,$$

где компоненты R^i_{jklp} объекта кривизны $\{R^i_{jkl}, R^i_{jklp}\}$ выражаются очевидным образом.

Т е о р е м а 4. Связность расслоения линейных реперов $L_{n^2}(V_n)$ имеет лифт в расслоении неголономных реперов 2-го порядка $\mathcal{D}^2(V_n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о дается формулой [16, с.75] :

$$L^i_{jkl}=\Gamma^i_{jkl}+\Gamma^i_{pk}\Gamma^p_{jl}+\Gamma^i_{jp}\Gamma^p_{kl}-\Gamma^p_{jk}\Gamma^i_{pl}, \qquad (28)$$

подтверждаемой соотношениями (19), (25), (27).

З а м е ч а н и я: 11) линейную связность в расслоении реперов некоторого порядка называют также линейной дифференциальной связностью соответствующего порядка [17, с.42] , аффинной связностью [5, с.167] или линейной дифференциально-геометрической связностью дифференцируемого многообразия [18, с.146] ; 12) история возникновения и развития понятия связности высшего порядка описана в обзоре Ю.Г.Лумисте [19].

6. <u>Продолженное главное расслоение.</u> Уравнения (1), (2), (13), (14), где используются обозначения (6), есть структурные уравнения продолжения [20] главного расслоения $G_r(V_n)$. Из них при фиксации точки базы V_n получим уравнения (4), (18) и следующие:

$$d\overline{\omega}^\alpha_i=\overline{\omega}^j_i\wedge\overline{\omega}^\alpha_j+C^\alpha_{\beta\gamma}\,\overline{\omega}^\beta_i\wedge\overline{\omega}^\gamma, \qquad (29)$$

которые в системе являются структурными уравнениями некоторой группы Ли тогда и только тогда, когда соответствующие структурные константы антисимметричны и удовлетворяют тождествам Якоби. Подсистемы (4) и (18) являются структурными уравнениями групп Ли G_r и $GL(n)$, поэтому достаточно рассмотреть подсистему (29). В нее входят внешние произведения разных совокупностей форм, поэтому нет необходимости проверять условия антисимметричности.

Тождества Якоби выражают замкнутость структурных уравнений группы Ли относительно операции внешнего дифференцирования. Дифференцируя внешним образом уравнения (29), найдем

$$(C^\alpha_{\beta\gamma}C^\beta_{\delta\varepsilon}+\tfrac{1}{2}C^\alpha_{\delta\beta}C^\beta_{\gamma\varepsilon})\,\overline{\omega}^\delta_i\wedge\overline{\omega}^\varepsilon\wedge\overline{\omega}^\gamma=0,$$

откуда следует

$$C^\alpha_{\beta[\gamma}C^\beta_{\delta\varepsilon]}+\tfrac{1}{2}C^\alpha_{\delta\beta}C^\beta_{[\gamma\varepsilon]}=0.$$

Умножая на 2 и раскрывая альтернирование, имеем

$$C^\alpha_{\beta\gamma}C^\beta_{\delta\varepsilon}-C^\alpha_{\beta\varepsilon}C^\beta_{\delta\gamma}+\tfrac{1}{2}(C^\alpha_{\delta\beta}C^\beta_{\gamma\varepsilon}-C^\alpha_{\delta\beta}C^\beta_{\varepsilon\gamma})=0.$$

Используя антисимметрию констант $C^\alpha_{\beta\gamma}$, получим

$$C^\alpha_{\beta\gamma}C^\beta_{\delta\varepsilon}+C^\alpha_{\beta\varepsilon}C^\beta_{\gamma\delta}+C^\alpha_{\beta\delta}C^\beta_{\varepsilon\gamma}=0,$$

а это с точностью до множителя есть тождества (3).

Таким образом, уравнения (4), (18), (29) являются структурными уравнениями некоторой r'-членной группы Ли $G_{r'}$ [8, с.139] , где $r'=r+n^2+nr$. Группа $G_{r'}$ содержит две подгруппы (точнее – факторгруппы): G_r и $GL(n)$, поэтому ее можно назвать продолжением прямого произведения $G_r \times GL(n)$, или просто продолженной группой. В общем случае $G_r \cap GL(n) = \emptyset$. Итак, справедлива

Т е о р е м а 5. Продолжение главного расслоения $G_r(V_n)$ есть главное расслоение $G_{r'}(V_n)$ с той же базой V_n, типовым слоем которого является продолженная группа $G_{r'}$.

З а м е ч а н и е: 13) теорема 5 есть частный случай результата, сформулированного в работах [4, с.53], [8, с.68].

7. <u>Связность в продолженном расслоении.</u> В дополнение к формам $\widetilde{\omega}^\alpha$, $\widetilde{\omega}^i_j$ рассмотрим формы $\widetilde{\omega}^\alpha_i = \omega^\alpha_i - L^\alpha_{ij}\omega^j$, внешние дифференциалы которых имеют вид

$$d\widetilde{\omega}^\alpha_i = \widetilde{\omega}^j_i \wedge \widetilde{\omega}^\alpha_j + C^\alpha_{\beta\gamma}\widetilde{\omega}^\beta_i \wedge \widetilde{\omega}^\gamma + \omega^j \wedge (\nabla L^\alpha_{ij} + C^\alpha_{\beta\gamma}\Gamma^\beta_j\omega^\gamma_i + \Gamma^k_{ij}\omega^\alpha_k + \omega^\alpha_{ij}) - (\Gamma^\ell_{ij}L^\alpha_{\ell k} + C^\alpha_{\beta\gamma}L^\beta_{ij}\Gamma^\gamma_k)\,\omega^j \wedge \omega^k.$$

Связность в главном расслоении $G_{r'}(V_n)$ задается с помощью поля объекта $\{\Gamma^\alpha_i, \Gamma^i_{jk}, L^\alpha_{ij}\}$, компоненты которого удовлетворяют уравнениям (7), (I9) и следующим:

$$\nabla L^\alpha_{ij} + \Gamma^k_{ij}\omega^\alpha_k - C^\alpha_{\beta\gamma}\Gamma^\gamma_j\omega^\beta_i + \omega^\alpha_{ij} = L^\alpha_{ijk}\omega^k. \qquad (30)$$

Формы связности $\widetilde{\omega}^\alpha, \widetilde{\omega}^i_j, \widetilde{\omega}^\alpha_i$ подчинены структурным уравнениям (8), (20), а также

$$d\widetilde{\omega}^\alpha_i = \widetilde{\omega}^j_i \wedge \widetilde{\omega}^\alpha_j + C^\alpha_{\beta\gamma}\widetilde{\omega}^\beta_i \wedge \widetilde{\omega}^\gamma + R^\alpha_{ijk}\omega^j \wedge \omega^k,$$

где компоненты R^α_{ijk} объекта кривизны $\{R^\alpha_{ij}, R^i_{jk\ell}, R^\alpha_{ijk}\}$ выражаются по формуле

$$R^\alpha_{ijk} = L^\alpha_{i[jk]} - \Gamma^\ell_{i[j}L^\alpha_{\ell k]} - C^\alpha_{\beta\gamma}L^\beta_{i[j}\Gamma^\gamma_{k]}.$$

Т е о р е м а 6. Связности главного расслоения $G_r(V_n)$ и расслоения $L_{n^2}(V_n)$ линейных реперов касательных пространств к базе V_n главного расслоения имеют лифт в продолженном расслоении $G_{r'}(V_n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Объект фундаментально-групповой связности Γ^α_i, его пфаффовы производные Γ^α_{ij} и объект линейной связности Γ^i_{jk} охватывают величины L^α_{ij} по формуле

$$L^\alpha_{ij} = \Gamma^\alpha_{ij} - C^\alpha_{\beta\gamma}\Gamma^\beta_i\Gamma^\gamma_j + \Gamma^\alpha_k\Gamma^k_{ij}, \qquad (31)$$

проверяемой с помощью соотношений (7), (I6), (19), (30).

З а м е ч а н и я: 14) если $GL(n) \subset G_r$, то связность исходного расслоения $G_r(V_n)$ определяет связность в продолженном расслоении $G_{r'}(V_n)$, где $r' = r(n+1)$; 15) если $GL(n) = G_r$,

то линейная связность, задаваемая объектом Γ^i_{jk}, индуцирует линейную связность 2-го порядка с объектом $\{\Gamma^i_{jk}, L^i_{jk\ell}\}$, причем формула охвата (3I) принимает вид (28); 16) если $GL(n) \supset G_r$ (случай классической G-структуры [10]), то линейная связность 2-го порядка, естественно, индуцирует связность в продолженном расслоении $G_{r'}(V_n)$, где $r' = n(n+r)$, а с учетом предыдущего замечания имеем: линейная связность 1-го порядка индуцирует связность в продолженном расслоении.

В ы в о д ы. Теорема 6 сводит построение объекта связности 2-го порядка $\{\Gamma^\alpha_i, \Gamma^i_{jk}, L^\alpha_{ij}\}$ к введению связности 1-го порядка: фундаментально-групповой с объектом Γ^α_i и линейной с объектом Γ^i_{jk}. Согласно теореме 5 продолжение главного расслоения $G_{r'}(V_n)$ дает некоторое главное расслоение $G_{r''}(V_n)$. Применяя к нему теорему 6, получим, что связность 3-го порядка сводится к связности 2-го порядка и т.д. Таким образом, связности высших порядков можно определить, исходя из связности I-го порядка. К аналогичному результату пришел Эресман с помощью теории струй [21]. Тем не менее теория связностей высших порядков имеет право на существование, особенно при исследовании связностей 2-го и более высокого порядка, не являющихся лифтами связности 1-го порядка.

Библиографический список

1. Л а п т е в Г.Ф. Многообразия, погруженные в обобщенные пространства // Тр. 4-го Всесоюз. матем. съезда, I96I. Л.: Наука, I964. Т.2. С.226-233.

2. Л у м и с т е Ю.Г. Связности в расслоенных пространствах с однородными слоями. Тарту, I977. 64 с.

3. О с т и а н у Н.М., Р ы ж к о в В.В., Ш в е й к и н П.И. Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., I973. Т.4. С.7-70.

4. Е в т у ш и к Л.Е., Л у м и с т е Ю.Г., О с т и а н у Н.М., Ш и р о к о в А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., I979. Т.9. 248 с.

5. Л а п т е в Г.Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., I966. Т.I. С.I39-I89.

6. Л и х н е р о в и ч А. Теория связностей в целом и

группы голономий. М., 1960. 216 с.

7. Близникас В.И. О некоторых связностях расслоенных пространств // Литовский матем. сб. 1967. Т.7. № 1. С.5-16.

8. Васильев А.М. Теория дифференциально- геометрических структур. М.:МГУ, 1987. 190 с.

9. Лумисте Ю.Г. Связности в однородных расслоениях // Матем. сб. 1966. Т.69. С.434-469.

10. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. М., 1970. 412 с.

11. Лаптев Г.Ф. Распределения касательных элементов // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1971. Т.3. С.29-48.

12. Шевченко Ю.И. Параллельный перенос фигуры в линейной комбинации связности // Дифференциальная геометрия многообразий фигур / Калинингр. ун-т. Калининград, 1987. Вып.18. С.115-120.

13. Лумисте Ю.Г. Инвариантные оснащения конгруэнции плоскостей аффинного пространства // Известия вузов. Математика. 1965. № 6. С.93-102.

14. Вагнер В.В. Теория дифференциальных объектов и основания дифференциальной геометрии // Веблен О., Уайтхед Дж. Основания дифференциальной геометрии. М., 1949. С.135-223.

15. Лумисте Ю.Г. Матричное представление полуголономной дифференциальной группы и структурные уравнения расслоения р-кореперов // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1974. Т.5. С.239-257.

16. Рыбников А.К. Об обобщенных аффинных связностях второго порядка // Известия вузов. Математика. 1983. № 1. С.73-80.

17. Вагнер В.В. Теория составного многообразия // Тр. семинара по вект. и тенз. анализу. М.;Л., 1950. Вып.8. С.11-72.

18. Близникас В.И. Неголономное дифференцирование Ли и линейные связности в пространстве опорных элементов // Литовский матем. сб. 1966. Т.6. № 2. С.141-209.

19. Лумисте Ю.Г. Теория связностей в расслоенных пространствах // Алгебра, топология, геометрия. 1969 / ВИНИТИ. М., 1971. С.123-168.

20. Лаптев Г.Ф. Структурные уравнения главного расслоенного многообразия // Тр. геометр. семинара/ ВИНИТИ. М., 1969. Т.2. С.161-178.

21. Ehresmann C. Sur les connexions d'ordre supérieur. // Atti del V° Congresso del l'Unione Mathematica Italiana, 1955. Roma - Cremonese, 1956. P. 326-328.

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ КВАДРИК В P_3 С ЧЕТЫРЕХКРАТНОЙ ФОКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

С.В.Шмелева

(Калининградское ВИМУ)

В трехмерном проективном пространстве исследуется подкласс конгруэнций линейчатых невырожденных квадрик Q с четырехкратной фокальной поверхностью (A_0), охватывающий класс конгруэнций квадрик Ли поверхности (A_0). Найдены характеристические признаки таких конгруэнций и изучены некоторые подклассы.

Среди конгруэнций линейчатых квадрик Q с четырехкратной фокальной поверхностью особую роль играют конгруэнции N, характеризующиеся одним из следующих признаков: 1) имеется по крайней мере одна фокальная точка $A_0 \in Q$ второго порядка [2, с.61], описывающая невырождающуюся поверхность; 2) ассоциированные с фокальной точкой $A_0 \in Q$ квадрики Q_i [1, с.44] являются конусами с вершиной A_0; 3) любая линия на фокальной поверхности (A_0) является и линией Γ_1, и линией Γ_2 [3, с.107].

Отнесем конгруэнцию N к реперу $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$, где A_0 – фокальная точка второго порядка квадрики $Q \in N$, A_3 – одна из остальных фокальных точек квадрики, а A_1, A_2 – точки пересечения прямолинейных образующих квадрики Q, проходящих через фокальные точки A_0 и A_3. Система уравнений Пфаффа конгруэнции N запишется (см.[2], (1,1), (1.9)) в виде

$$\begin{cases} \omega_0^3 = 0, \ \omega_3^0 = 0, \ \omega_i^j = a_{ik}^j \omega^k, \ \omega_i^3 - \omega^j = 0, \\ \omega_i^0 - \omega_3^j = \lambda_{ik} \omega^k, \ \omega_3^i = b_k^i \omega^k, \ \Omega = h_k \omega^k, \end{cases} \qquad (1)$$

где ω_α^β $(\alpha, \beta = 0,1,2,3)$ – компоненты деривационных формул репера,